CONCOURS EXTERNE 1988 D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION : OPTION MATHEMATIQUES II

DUREE : 4 HEURES COEFFICIENT : 6

Les deux problèmes sont à traiter et sont indépendants. La rigueur des développements et la clarté de leur présentation seront pris en compte dans la notation de la copie.

PROBLEME I

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) = 0$, ..., $f_n^{[n]}(0) = 0$ et $f_n^{[n+1]}(x) = x^n e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1) Montrer qu'il existe une fonction f_n unique vérifiant les conditions précédentes.

2) Déterminer un équivalent de $f_n(x)$ quand x tend vers 0 ; soit $a \in \mathbb{R}$, étudier le signe de $f_n(a)$ et la limite de $f_n(a)$ quand n tend vers l'infini.

3) Montrer qu'il existe un couple $(A_n, B_n) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ tel que $f_n(x) = A_n(x) + e^x B_n(x)$ (On pourra introduire l'espace vectoriel E des fonctions réelles de la forme $e^x P(x)$, où $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et l'application linéaire D qui associe à une fonction sa dérivée).

4) Montrer que les coefficients de B_n sont entiers.

5) Calculer la dérivée d'ordre n + 1 de $e^{-x} A_n(x)$ et en déduire que les coefficients de A_n sont entiers.

6) On veut démontrer par l'absurde que $e^m \notin \mathbb{Q}$ $(m \in \mathbb{N}^*)$; en supposant qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q\, e^m \in \mathbb{N}$, déterminer un encadrement de $|f_n(m)|$ pour n assez grand et conclure.

PROBLEME II

Les questions 4) et 5) ne font pas intervenir les résultats des questions précédentes.

On considère l'espace affine euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{E}$, muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct et la sphère S de centre O et de rayon 1. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1) On définit l'application Φ de S dans $(\mathcal{U} \times]-1,1[) \cup (\{1\} \times \{-1,1\})$ qui à un point M de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associe le couple (A, a), $A \in \mathcal{C}$, $a \in \mathbb{R}$ tel que a = z et

$$\begin{cases} \text{si } |z| = 1 & A = 1 \\ \text{si } |z| \neq 1 & A = (x + iy) / \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Montrer que Φ est bijective et exprimer sa réciproque Φ^{-1} (Dans cette question comme dans les suivantes, on pourra alléger les formules en posant $A = e^{i\lambda}$ et $a = \sin\theta$ avec $\lambda \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.)

2) Soit $(A_0, a_0) \in \mathcal{U} \times]-1,1[$ et $P = \Phi^{-1}(A_0, a_0)$. On définit un nouveau repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par $\vec{w} = \vec{OP}$, $\vec{v} = \vec{k} \wedge \vec{w} / \|\vec{k} \wedge \vec{w}\|$ ($\|\vec{k} \wedge \vec{w}\| \neq 0$ car $|a_0| \neq 1$) et $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Exprimer les relations qui lient les coordonnées (x, y, z) de M dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et ses nouvelles coordonnées (x', y', z') dans $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (on pourra poser $A_0 = e^{i\lambda_0}$ et $a_0 = \sin\theta_0$).

3) On définit l'application Ψ de S dans $(\mathcal{U} \times]-1,1[) \cup (\{1\} \times \{-1,1\})$ de manière analogue au 1) : au point M de coordonnées (x', y', z') dans $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ on fait correspondre le couple (A', a') tel que a' = z' et

$$\begin{cases} \text{si } |z'| = 1 & A' = 1 \\ \text{si } |z'| \neq 1 & A' = (x' + iy') / \sqrt{x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

Expliciter $\Psi \circ \Phi^{-1}$ et $\Phi \circ \Psi^{-1}$. (On pourra poser $A' = e^{i\lambda'}$ et $a' = \sin\theta'$).

4) Soit (π) le plan tangent à S en P et Q le point symétrique de P par rapport à O. On considère l'application φ qui à $M \in S - \{Q\}$ associe le point $\varphi(M)$ intersection de la droite (QM) avec le plan (π). Montrer que φ est une bijection de $S - \{Q\}$ dans (π) et exprimer les coordonnées cartésiennes (α, β) de $\varphi(M)$ dans le repère $(P, \vec{u}, \vec{v})$ en fonction de (A', a'). (On pourra poser $\zeta = \alpha + i\beta$).

5) Soit r un réel strictement positif. On considère l'homothétie h de centre P et de rapport r et l'application ψ de S dans S qui laisse Q invariant et vaut $\varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$ dans $S - \{Q\}$. En posant $s = \frac{1-r^2}{1+r^2}$, expliciter $\Psi \circ \psi \circ \Psi^{-1}$ (c'est à dire exprimer $(A'', a'') = \Psi \circ \psi \circ \Psi^{-1}(A', a')$ en fonction de (A', a')) et sa réciproque.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail